PARAGRAAF 9.1 TWEE SOORTEN GROEI

LES 1 LINEAIRE EN EXPONENTIËLE FORMULES

Er zijn twee soorten formules

A. LINEAIRE FORMULES

(1) Algemene formule van een lijn : $y = ax + b$

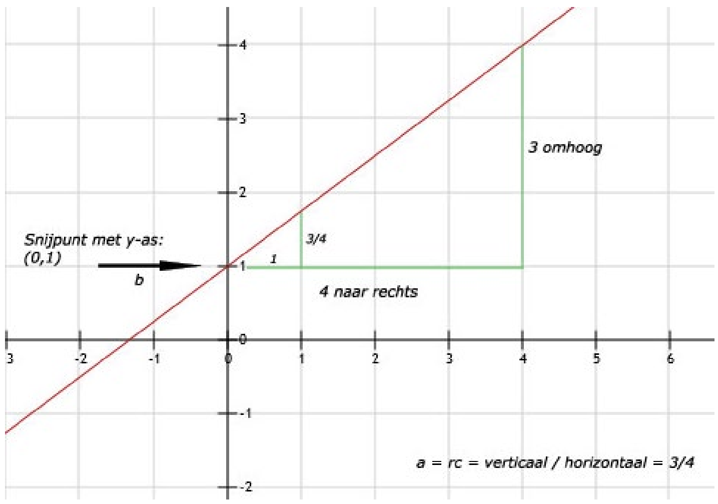
a = hellingsgetal = RC

b = beginwaarde (0,b) (snijpunt y-as)

(2) Lijnen gebruik je als :

- Iedere keer hetzelfde getal erbij komt / eraf gaat (+5 / -3).

(3) De grafiek



STAPPENPLAN LIJN DOOR TWEE PUNTEN A EN B

(1) Lijn heeft <u>altijd</u> vergelijking $y = ax + b$

(2) Bepaal de a door $a = rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$

(3) Bereken b door punt A in te vullen in $y = ax + b$

VOORBEELD 1

Lijn m gaat door $(3,5)$ en $(8,20)$. Bepaal de vergelijking van lijn m.

OPLOSSING 1

(1) $y = ax + b$

(2) $$a = \frac{verschil\ y}{verschil\ x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20-5}{8-3} = \frac{15}{5} = 3$$

(3) Je weet nu dat $y = 3x + b$

Punt $(3,5)$ invullen $5 = 3 \cdot 3 + b$

$5 = 9 + 6$

$b = -4$

Dus lijn m : $y = 3x - 4$.

B. EXPONENTIËLE FUNCTIES

(1) Algemene formule : N = b · g^t waarbij

b = beginhoeveelheid t = tijd

g = groeifactor

(2) Exponentiële functies gebruik je als :

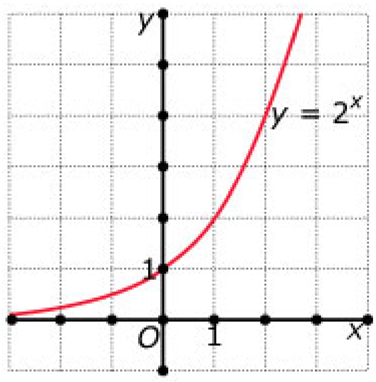
- Iedere keer met hetzelfde getal vermenigvuldigd wordt (×2)
- Iedere keer hetzelfde percentage erbij komt of eraf gaat.

(Iedere keer + 3% → Iedere keer ×1,03)

(3) De grafiek is

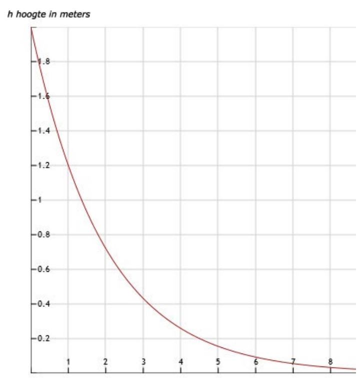
(3.1) een snel stijgende kromme als de groeifactor > 1 is.

Voorbeeld : $y = 2^x$



(3.2) een snel dalende kromme als de groeifactor < 1 is.

Voorbeeld : $y = 2 \cdot 0{,}6^x$



VOORBEELD 2

Harrie zet op 1 jan 2003 een bedrag van 500 euro op de bank. Hij krijgt 6% rente per jaar.

a. Is dit lineair of exponentieel ? Waarom ?

b. Bepaal de formule van het bedrag dat Harrie na t jaren op de bank heeft staan.

c. Bereken het bedrag na 5 jaar.

d. Bereken in welk jaar het bedrag voor het eerst meer dan verdubbeld is.

Jan zet op 1 jan 2003 een bedrag van 700 euro op de bank. Hij krijgt €50 rente per jaar.

e. Stel de formule van Jan op

f. Bereken in welk jaar het bedrag van Harrie groter is dan dat van Jan.

OPLOSSING 2

a. Exponentieel, iedere keer +6% → x 1,06.

b. $N = 500 \cdot 1{,}06^t$.

c. $N(5) = 500 \cdot 1{,}06^5 = 669{,}11$ (euro's dus 2 decimalen)

d. $1000 = 500 \cdot 1{,}06^t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1{,}06^t$ en $Y2 = 1000$
(2) Intersect
(3) x =11,9 = 12 jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in 2003 + 12 = 2015

e. Nu komt er iedere keer een vast bedrag bij (+50). Dus nu een lineaire formule :
$y = 700 + 50t$

f. Harrie > Jan → $500 \cdot 1{,}06^{t} > 700 + 50t$

Eerst oplossen $500 \cdot 1{,}06^{t} = 700 + 50t$

(1) $Y1 = 500 \cdot 1{,}06^{x} \quad en \quad Y2 = 700 + 50x$
(2) Intersect
(3) x = 21,97 = 22 jaar (rente krijg je pas aan het einde)

Dus in 2003 + 22 = 2025

LES 2 TABELLEN BIJ EXPONENTIËLE FORMULES

VOORBEELD 1

Gegeven is de volgende tabel over het aantal inwoners van dorp A :

t	0	1	2	3
y	800	1296	2100	3402

Met t in jaren en y is het aantal inwoners en t = 0 is het jaar 2000.

a. Toon aan dat dit een exponentiële formule is.

b. Bepaal de formule.

c. Bereken in welk jaar er voor het eerst meer dan 10000 inwoners bijkomen.

In dorp B wonen in het jaar 2000 in totaal 8000 mensen. Ieder jaar komen er 1000 inwoners bij.

d. Bereken in welk jaar het aantal inwoners in stad A en B gelijk zijn.

OPLOSSING 1

a. Ze moeten (afgerond) allemaal gelijk zijn :

$$\frac{1296}{800} = 1{,}62 \quad \frac{2100}{1296} = 1{,}62 \quad \frac{3402}{2100} = 1{,}62$$

Ze zijn gelijk dus exponentieel met g=1,62

b. $y = 800 \cdot 1{,}62^t$

c. Gebruik de tabel !!!

(1) $Y1 = 800 \cdot 1{,}62^t$

(2)

X	Y1	
6	14460	
7	23426	(+ 8966)
8	37950	(+ 14524)

Dus in het 7e jaar → dus in 2007

d. $y = 1000t + 8000$

Eerst oplossen :

$1000t + 8000 = 800 \cdot 1{,}62^t$

(1) $Y1 = 1000t + 8000$ en $Y2 = 800 \cdot 1{,}62^t$
(2) Intersect
(3) x = 5,92
Dus in het 5e jaar (inwoners komen iedere dag erbij !!!!)

Dus in het jaar = 2000 + 5 = 2005

PARAGRAAF 9.2 GROEIPERCENTAGES

VOORBEELD 1

Een bacterie groeit met 12 % per dag. Bereken de groeifactor en het groeipercentage per

a. 2 dagen

b. week

c. halve dag

d. uur

OPLOSSING 1

100 + 12 = 112 → 112/100 = 1,12

Groeifactor per dag 1,12

a. $g = 1{,}12$

$g_{2dagen} = g^2 = 1{,}12^2 = 1{,}2544$

$Groeipercentage = 125{,}44 - 100 = 25{,}44\%$

b. $g = 1{,}12$

$g_{week} = g_{7\ dagen} = g^7 = 1{,}12^7 = 2{,}2107$

$Groeipercentage = 221{,}07 - 100 = 121{,}07\%$

c. $g = 1{,}12$

$g_{\frac{1}{2}dag} = g^{\frac{1}{2}} = 1{,}12^{\frac{1}{2}} = 1{,}0583$

$Groeipercentage = 105{,}83 - 100 = 5{,}83\%$

d. $g = 1{,}12$

$g_{uur} = g_{\frac{1}{24}dag} = g^{\frac{1}{24}} = 1{,}12^{\frac{1}{24}} = 1{,}0047$

$Groeipercentage = 100{,}47 - 100 = 0{,}47\%$

VOORBEELD 2

Een andere bacterie verdubbelt in 10 jaar. Bereken het groeipercentage per jaar.

OPLOSSING 2

Je kunt dit op 2 manieren oplossen :

(1) Neem als beginhoeveelheid bijvoorbeeld 100 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$.
Dit geeft :

$$100 \cdot g^{10} = 200$$
$$g^{10} = 2$$
$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}072 \qquad \text{dus} \quad groeipercentage = 7{,}2\%$$

(2) Het verdubbelt in 10 dagen. Dus

$$g_{10\ dagen} = 2$$
$$g = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}072 \qquad \text{dus} \quad groeipercentage = 7{,}2\%$$

PARAGRAAF 9.3 VERDUBBELINGS- EN HALVERINGSTIJD

VOORBEELD 1

In de dierentuin bevinden zich op een dag 800 mieren. Iedere dag daalt de populatie met 6%.

a. Bepaal de formule van het aantal mieren in t dagen.

b. Bereken aan het begin van welke dag het aantal mieren voor het eerst (meer dan) gehalveerd is.

OPLOSSING 1

a. $N = 800 \cdot 0{,}94^t$.

b. $400 = 800 \cdot 0{,}94^t$

(1) $Y1 = 800 \cdot 0{,}94^x$ en $Y2 = 400$
(2) Intersect
(3) x = 11,2
Dus de 12e dag

Of

(1) $Y1 = 0{,}94^x$ en $Y2 = 0{,}5$
(2) Intersect
(3) x = 11,2
Dus de 12e dag

Of

(1) $Y1 = 800 \cdot 0{,}94^x$
(2) Table

X	Y1
11	405,04
12	380,74

(3) Dus de 12e dag

PARAGRAAF 9.4 EXPONENTIËLE FORMULE BEPALEN / VERZADIGING

LES 1 : EXPONENTIËLE FORMULE BEPALEN

VOORBEELD 1

Een hoeveelheid neemt exponentieel af. Op $t = 3$ is $N = 505$ en op $t = 8$ is $N = 150$.

Stel de formule op van N.

OPLOSSING 1

Je kunt een stappenplan gebruiken :

(1) Formule $N = b \cdot g^t$
(2) Groeifactor berekenen $g_{...dagen} = \frac{Achterste}{Voorste}$
(3) Beginwaarde b berekenen door een punt in te vullen
(4) Formule opschrijven

(1) Formule $N = b \cdot g^t$
(2) Groeifactor uitrekenen. Dit kan op twee manieren :

(2.1) Neem als beginhoeveelheid 505 en gebruik de formule $N = b \cdot g^t$:

$150 = 505 \cdot g^5$ (of los dit op met intersect)

$g^5 = \frac{150}{505} = 0{,}297..$

$g = 0{,}297^{\frac{1}{5}} = 0{,}784$

(2.2) $g_{5\ jaren} = \frac{150}{505} = 0{,}297..$

$g_{1\ jaar} = 0{,}297^{\frac{1}{5}} = 0{,}784$ *(methode boek)*

(3) beginwaarde uitrekenen

Je weet $N = b \cdot 0{,}748^t$

Punt (3,505) invullen → $505 = b \cdot 0{,}748^3$ (of intersect)

$$b = \frac{505}{0{,}7843^3} = 1048$$

(4) Formule $N = 1048 \cdot 0{,}748^t$

LES 2 : VERZADIGINGSNIVEAU BEPALEN

DEFINITIE

(1) Verzadigingsniveau = { y-waarde waar de formule op termijn naar toe gaat }
(2) Verzadigingsniveau berekenen → t heel groot maken (t = 1000000)

VOORBEELD 1

Beredeneer het verzadigingsniveau en de praktische betekenis van

a. De hoeveelheid medicijn (M) in het bloed gedraagt zich volgens de formule $M = 1 + 3 \cdot 0{,}2^t$

b. Het aantal bacteriën (B) groeit volgens de formule $B = \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t}$

c. Beredeneer of de formule van B stijgend of dalend is.

OPLOSSING 1

a. $t\ heel\ groot \quad \Longrightarrow 3 \cdot 0{,}2^t \approx 0 \quad \Rightarrow 1 + 3 \cdot 0{,}2^t \approx 1$
Dus het verzadigingsniveau is 1 (gram)
Dit betekent dat er altijd 1 gram medicijn in het bloed blijft !!!

b. $t\ heel\ groot \quad \Longrightarrow 3 \cdot 0{,}4^t \approx 0 \quad \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0{,}2^t \approx 6 \quad \Rightarrow \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t} = \frac{180}{6} = 30$
Het aantal bacteriën (B) gaat op lange termijn naar 30

c. $t \uparrow \Rightarrow 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow 3 \cdot 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow 6 + 3 \cdot 0{,}4^t \downarrow \Rightarrow \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^t} \uparrow$
Dus een stijgende functie.

OPMERKING

Je kunt **c** al beredeneren omdat op t = 0 er $B = \frac{180}{6+3\cdot 0{,}4^0} = \frac{180}{9} = 20$ beestjes zijn en het verzadigingsniveau is 30 (dus stijgend).

PARAGRAAF 9.5 LOGARITMISCH PAPIER

DEFINITIES LOGARITMISCH PAPIER

Op logaritmisch papier is :

(1) de macht lineair (iedere keer + 1)

(2) wordt in een stapje alles 10 keer zo groot

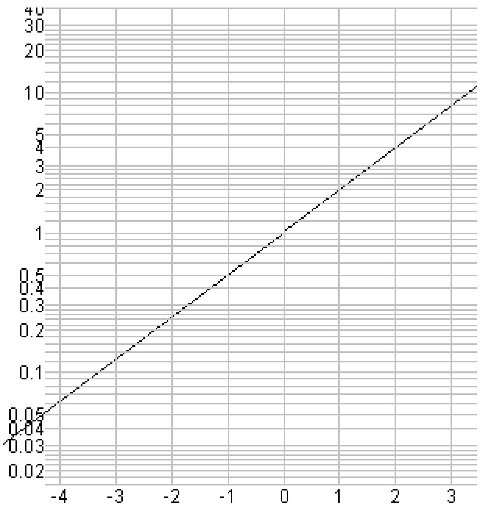
(3) de formule $N = b \cdot g^t$ (exponentiële) een rechte lijn !!!!

VOORBEELD 1

Aflezen A,B,C,D,E en F op blz. 44 log papier.

VOORBEELD 2

Gegeven is de volgende lijn. Bepaal de formule van de lijn



OPLOSSING 2

Je kunt gebruik maken van het stappenplan uit paragraaf 10.4. Lees twee punten af, bijvoorbeeld (-1 , ½) en (2,4)

(1) Rechte lijn dus $N = b \cdot g^t$

(2) $g_{3\ jaar} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

$g_{\ jaar} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

(3) $N = b \cdot 2^t$

Punt (2,4) invullen→ $4 = b \cdot 2^2$

$b = 1$

(4) Dus $N = 1 \cdot 2^t$

OPMERKING

Bij dubbellogpapier zijn beide assen logaritmisch.